НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 517.97

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Анастасия Сергеевна ЛАНИНА
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»,
г. Тамбов, Российская Федерация

Аннотация. Исследованы частные случаи задач дискретной оптимизации. Сформулирована задача о классическом бинарном рюкзаке и рассмотрен алгоритм Ленд и Дойга для ее решения. Найдено кратчайшее расстояние между городами Тамбовской области с помощью алгоритма Литтла для решения задачи коммивояжера.

Ключевые слова: задача о рюкзаке, алгоритм Ленд и Дойг, задача коммивояжера, алгоритм Литтла

Для цитирования: *Ланина А.С.* Решение задач дискретной оптимизации // Державинский форум. 2022. Т. 6, № 1. С. 167-177

ORIGINAL ARTICLE

SOLVING DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

Anastasiya S. LANINA
Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation

Abstract. Particular cases of discrete optimization problems are studied. The classical binary knapsack problem is formulated and the Lend and Doig algorithm for its solution is considered. The shortest distance between the cities of the Tambov region is found using the Little algorithm for solving the traveling salesman problem.

Keywords: knapsack problem, Land and Doig’s algorithm, traveling salesman problem, Little’s algorithm

For citation: Lanina A.S. Resheniye zadach diskretnoy optimizatsii [Solving discrete optimization problems]. *Derzhavinskiy forum – Derzhavin Forum*, 2022, vol. 6, no. 1, pp. 167-177. (In Russian, Abstr. in Engl.)

В современном мире человек всегда стоит перед выбором. И этот выбор хочется сделать с минимальными затратами и наибольшей прибылью. Так, для управления социально-экономическими системами и производственными объектами применяются задачи дискретной оптимизации. Они имеют широкий спектр применения, а методы их решения постоянно исследуются и развиваются.

Наиболее распространены в социально-экономической сфере бинарные задачи. Рассмотрим метод Ленд и Дойг решения классической бинарной задачи о рюкзаке.

Сначала сформулируем задачу в общем виде.

Пусть имеется набор из n предметов, имеющих значимости c_i и массу a_i, $i = \overline{1,n}$. Требуется собрать набор наибольшей полезности, вес которого не должен превышать некоторого числа b. Под переменными $x_i, i = \overline{1,n},$ понимают количество упакованных предметов каждого типа.

Классическая бинарная задача о рюкзаке имеет следующий вид [1, с. 6]:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

где $0 \le a_j \le b, c_j > 0, x_j \in \{0,1\}, j = \overline{1,n}.$

Правило Данцига [1, с. 49]: Если переменные $x_j, j = \overline{1,n},$ пронумерованы так, что $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$, где $\lambda_j = \frac{c_j}{a_j}$, то оптимальное решение задачи имеет вид $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1 = x_2 = \cdots = x_{s-1} = 1, x_s = = b - \sum_{j=1}^{s-1} a_j \Big/ a_s$, $x_{s+1} = x_{s+2} = \cdots = x_n = 0$, где s определяется из неравенства $\sum_{j=1}^{s-1} a_j \le b \le \sum_{j=1}^{s} a_j$.

По данному правилу решаются оценочные задачи на множествах. Рассмотрим алгоритм решения поставленной задачи на конкретном примере.

В магазин цветов поступило 4 заказа. Первый клиент заказал букет стоимостью 5 тысяч, второй – 3 тысячи, третий и четвертый клиенты заказали букеты за 4 тысячи. На изготовление букетов первого, второго и четвертого клиентов понадобится 2 часа на каждый. Букет для третьего клиента можно собрать за 1 час. Флорист работает 4 часа в день. Заказы каких клиентов ему нужно взять, чтобы не задерживаться на работе и получить наибольшую прибыль?

Решение. Обозначим клиентов переменными x_1, x_2, x_3, x_4. Если $x_j = 1$, то заказ клиента j принимаем, если $x_j = 0$, то клиенту j отказываем в изготовлении букета. Получаем задачу вида:

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \to \max, \tag{1}$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4. \tag{2}$$

Решим оценочную задачу по правилу Данцига.

$\lambda_1 = \frac{5}{2} = 2{,}5$, $\lambda_2 = \frac{3}{1} = 1{,}5$, $\lambda_3 = \frac{4}{1} = 4$, $\lambda_4 = \frac{4}{2} = 2$, заметим, что $\lambda_3 \geq \lambda_1 \geq \lambda_4 \geq \lambda_2$. Делаем замену переменных: $x_3 = y_1, x_1 = y_2, x_4 = y_3, x_2 = y_4$.

Тогда условие (2) примет вид $y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leq 4$.

Заметим, что $s = 3$, так как $1 + 2 \leq 4 \leq 1 + 2 + 2$.

Тогда $y_1 = y_2 = 1, y_3 = \frac{4-(1+2)}{2} = 0{,}5, y_4 = 1$. С учетом замены получаем $\bar{x} = (1{,}0{,}1{,}\frac{1}{2})$. Тогда верхняя граница на исходном множестве решений D будет равна значению исследуемой функции (1) в найденной точке, то есть $\xi(D) = f(\bar{x}) = 5 + 0 + 4 + 2 = 11$.

Так как x_4 не принадлежит множеству целых чисел, то задачу необходимо исследовать дальше. Разобьем исходное множество на два непересекающихся подмножества D_1^1, где $x_4 = 0$, и D_1^2, где $x_4 = 1$.

Аналогично, решив оценочную задачу на множестве D_1^1, где $x_4 = 0$, найдем

$\bar{x} = (1, \frac{1}{2}, 1{,}0)$ и $\xi(D_1^1) = f(\bar{x}) = 5 + 1{,}5 + 4 + 0 = 10{,}5$.

Из оценочной задачи на множестве D_1^2, где $x_4 = 1$, найдем $\bar{x} = (\frac{1}{2}, 0{,}1{,}1)$ и $\xi(D_1^2) = f(\bar{x}) = 2{,}5 + 0 + 4 + 4 = 10{,}5$.

Так как обе вершины имеют одинаковую нижнюю оценку, то необходимо производить ветвление в каждой из этих вершин.

Произведем ветвление в вершине D_1^1, где $x_4 = 0$, получим два непересекающихся подмножества D_2^1, где $x_2 = 0$, и D_2^2, где $x_2 = 1$.

Из оценочной задачи на множестве D_2^1, где $x_2 = x_4 = 0$, получаем $\bar{x} = (1, 0{,}1{,}0)$ и $\xi(D_2^1) = f(\bar{x}) = 5 + 0 + 4 + 0 = 9$. Полученный вектор принадлежит множеству допустимых решений, поэтому рекорд на исходном множестве будет равен $\xi(D_2^1) = 9$.

Из оценочной задачи на множестве D_2^2, где $x_4 = 0$, $x_2 = 1$, получаем $\bar{x} = (\frac{1}{2}, 1{,}1{,}0)$ и $\xi(D_2^2) = f(\bar{x}) = 2{,}5 + 0 + 4 + 4 = 10{,}5$.

Произведем ветвление в вершине D_1^2, где $x_4 = 1$, получим два непересекающихся подмножества D_2^3, где $x_1 = 0$, и D_2^4, где $x_1 = 1$.

Из оценочной задачи на множестве D_2^3, где $x_4 = 1, x_1 = 0$, получаем $\bar{x} = (0, \frac{1}{2}, 1{,}1)$ и $\xi(D_2^3) = f(\bar{x}) = 0 + 1{,}5 + 4 + 4 = 9{,}5$.

Из оценочной задачи на множестве D_2^4, где $x_4 = x_1 = 1$, получаем $\bar{x} = (1, 0,0,1)$ и $\xi(D_2^4) = f(x) = 5 + 0 + 0 + 4 = 9$.

Найденная верхняя граница будет являться решением, которое не превосходит рекорд, поэтому рекорд не меняем. Дальнейшее ветвление множеств не имеет смысла, так как все рекордные решения уже получены (рис. 1).

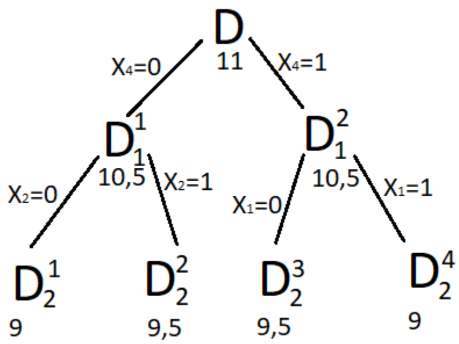

Рис. 1. Ветвление множества решений
Fig. 1. Branching of a solution set

Ответ: $\bar{x} = (1, 0,1,0)$ и $f(\bar{x}) = 9$. Таким образом, выгоднее взять заказы первого и третьего клиентов, за них флорист получит 9 тысяч.

Еще одной распространенной задачей дискретной оптимизации является задача коммивояжера, которая заключается в следующем.

Пусть имеются несколько городов, каждому из которых присвоен свой номер. Коммивояжер должен совершить поездку по городам и вернуться обратно, побывав в каждом городе ровно один раз. Причем затраты на передвижение должны быть минимальными [1, с. 70].

Рассмотрим алгоритм Литтла для решения задачи коммивояжера на конкретном примере.

Студенты Державинского университета хотят посетить 8 городов Тамбовской области. В каком порядке нужно объехать города, чтобы затраты на дорогу были наименьшими?

Решение. Обозначим все города Тамбовской области[1] [2] номерами: 1 – Кирсанов; 2 – Котовск; 3 – Мичуринск; 4 – Моршанск; 5 – Рассказово; 6 – Жердевка; 7 – Тамбов; 8 – Уварово.

[1] Об административно-территориальном устройстве Тамбовской области: Закон Тамбовской области от 21.06.1996 № 72-з (с изм. от 20.09.2021 г.). Доступ из СПС «Гарант».

Таблица 1

Шаг 1

Table 1

Step 1

№ 1	1	2	3	4	5	6	7	8
1		103	168	182	64	188	94	111
2	103		94	118	41	112	23	126
3	168	94		156	106	184	74	191
4	182	118	156		120	216	90	205
5	64	41	106	120		126	32	87
6	188	112	184	216	126		126	78
7	94	23	74	90	32	126		117
8	111	126	191	205	87	78	117	

Построим для данной задачи матрицу стоимостей, элементами которой будут расстояния между городами (табл. 1).

Приводим данную матрицу по строкам с константами $25, 64, 23, 74, 90, 32, 78, 23, 78$ (то есть из каждого элемента первой строки вычитаем 25, из каждого элемента второй строки – 64 и так далее). Затем приводим матрицу по $1, 3$ и 4 столбцам с константами $32, 51$ и 67 соответственно. Сумма констант приведения $\xi(D) = 612$ будет нижней границей на исходном множестве [2, с. 52].

При отказе выбора нулевого элемента (1,5) (табл. 2) придется выбрать в первой строке и пятом столбце новые элементы с наименьшим весом – это элемент $(1{,}7) = 30$ и $(7{,}5) = 9$. Будем называть оценкой ветвления (1,5) сумму новых элементов $\theta_{15} = 39$ [3, с. 79].

Таблица 2

Шаг 2

Table 2

Step 2

№ 2	1	2	3	4	5	6	7	8
1		39	53	51	0	124	30	47
2	48		20	28	18	89	0	103
3	62	20		15	32	110	0	117
4	60	28	15		30	126	0	115
5	0	9	23	21		94	0	55
6	78	34	55	71	48		48	0
7	39	0	0	0	9	103		94
8	1	48	62	60	9	0	39	

Аналогично оцениваем другие нулевые элементы полученной приведенной матрицы (табл. 2): $\theta_{27} = 18, \theta_{37} = 15, \theta_{47} = 15, \theta_{51} = 1,\ \theta_{57} = = 0, \theta_{68} = 81, \theta_{72} = 9, \theta_{73} = 15, \theta_{74} = 15, \theta_{86} = 90$.

Выбираем элемент с наибольшей оценкой – (8,6). Тогда оценка на множестве, где ни один путь не содержит (8,6), $\xi\big(D\overline{(8,6)}\big) = \xi(D) + +\theta_{86} = 702$ [2, с. 54].

Найдем оценку на множестве $D(8,6)$, где каждый путь проходит через (8,6). Вычеркиваем строку 8 и столбец 6, удаляем ветвление $(6,8)$ [2, с. 55]. Приводим 6 строку с константой 34 и 8 столбец с константой 47.

Тогда $\xi\big(D(8,6)\big) = \xi(D) + 34 + 47 = 693$ [2, с. 55].

Так как оценка на множестве $D(8,6)$ меньше, чем на $D(\overline{(8,6)})$, то продолжаем ветвление только на множестве $D(8,6)$.

Таблица 3

Шаг 3

Table 3

Step 3

№ 3	1	2	3	4	5	7	8
1		39	53	51	0	30	0
2	48		20	28	18	0	56
3	62	20		15	32	0	70
4	60	28	15		30	0	68
5	0	9	23	21		0	8
6	44	0	21	37	14	14	
7	39	0	0	0	9		47

Из табл. 3 следует: $\theta_{15} = 9, \theta_{18} = 8, \theta_{27} = 18, \theta_{37} = 15, \theta_{47} = 15, \theta_{51} = 39, \theta_{57} = 0, \theta_{62} = 14, \theta_{72} = 0, \theta_{73} = 15, \theta_{74} = 15$.

$\xi\big(D\overline{(5,1)}\big) = \xi\big(D(8,6)\big) + \theta_{51} = 732.\ \ \xi\big(D(5,1)\big) = \xi(D(8,6)) + 9 = 702.$

Продолжаем ветвление только на множестве $D(5,1)$.

Из табл. 4 следует: $\theta_{18} = 77, \theta_{27} = 9, \theta_{37} = 15, \theta_{47} = 15, \theta_{62} = = 5, \theta_{72} = 0, \theta_{73} = 15, \theta_{74} = 15, \theta_{75} = 15$.

$\xi\big(D\overline{(1,8)}\big) = \xi\big(D(5,1)\big) + \theta_{18} = 779.\ \xi\big(D(1,8)\big) = \xi(D(5,1)) + 0 = 702.$

Продолжаем ветвление только на множестве $D(1,8)$.

Из табл. 5 получаем: $\theta_{27} = 9,\ \theta_{37} = 15,\ \theta_{47} = 15,\ \theta_{62} = 14, \theta_{72} = = 0,\ \theta_{73} = 15,\quad \theta_{74} = 15, \theta_{75} = 9$.

$\xi\big(D\overline{(3,7)}\big) = \xi\big(D(1,8)\big) + \theta_{37} = 717.\ \xi\big(D(3,7)\big) = \xi(D(1,8)) + 39 = 741.$

Продолжаем ветвление только на множестве $D\overline{(3,7)}$.

Таблица 4

Шаг 4

Table 4

Step 4

№ 4	2	3	4	5	7	8
1	39	53	51		30	0
2		20	28	9	0	56
3	20		15	23	0	70
4	28	15		21	0	68
6	0	21	37	5	14	
7	0	0	0	0		47

Таблица 5

Шаг 5

Table 5

Step 5

№ 5	2	3	4	5	7
2		20	28	9	0
3	20		15	23	0
4	28	15		21	0
6	0	21	37		14
7	0	0	0	0	

Таблица 6

Шаг 6

Table 6

Step 6

№ 6	2	3	4	5	7
2		20	28	9	0
3	5		0	8	
4	28	15		21	0
6	0	21	37		14
7	0	0	0	0	

Исключаем ветвь $(3, 7)$. Приводим матрицу по 3 строке с константой 15.

По табл. 6 видим: $\theta_{27} = 9, \theta_{34} = 5, \theta_{47} = 15, \theta_{62} = 14, \theta_{72} = 0,$ $\theta_{73} = 15, \theta_{74} = 15, \theta_{75} = 8.$

$\xi\left(D\overline{(7,3)}\right) = \xi\left(D\overline{(3,7)}\right) + \theta_{73} = 732.$ $\xi\left(D(7,3)\right) = \xi\left(D\overline{(3,7)}\right) + 8 = 725.$

Продолжаем ветвление только на множестве $D(7,3)$.

Таблица 7

Шаг 7

Table 7

Step 7

№ 7	2	4	5	7
2		28	1	0
3	5	0	0	
4	28		13	0
6	0	37		14

Из табл. 7 следует: $\theta_{27} = 1, \theta_{34} = 28, \theta_{35} = 1, \theta_{47} = 13, \theta_{62} = 19.$

$\xi\left(D\overline{(3,4)}\right) = \xi\left(D(7,3)\right) + \theta_{34} = 753.$

$\xi\left(D(3,4)\right) = \xi(D(7,3)) + 12 + 1 = 738.$

Продолжаем ветвление только на множестве $D(3,4)$.

Таблица 8

Шаг 8

Table 8

Step 8

№ 8	2	5	7
2		0	0
4	16	0	
6	0		14

Из табл. 8 получим: $\theta_{25} = 0, \theta_{27} = 14, \theta_{45} = 16, \theta_{62} = 40.$

$\xi\left(D\overline{(6,2)}\right) = \xi(D(3,4)) + \theta_{62} = 778.$ $\xi\left(D(6,2)\right) = \xi(D(3,4)) = 738.$

Продолжаем ветвление только на множестве $D(6,2)$.

Табл. 9 имеет размер 2×2. Так как в каждой строке и в каждом столбце должно быть только по одному выбранному элементу, следовательно, выбираем ветвление по дугам $(2, 7)$ и $(4, 5)$ (рис. 2) [3, с. 80].

Таблица 9

Шаг 9

Table 9

Step 9

№ 9	5	7
2	0	0
4	12	0

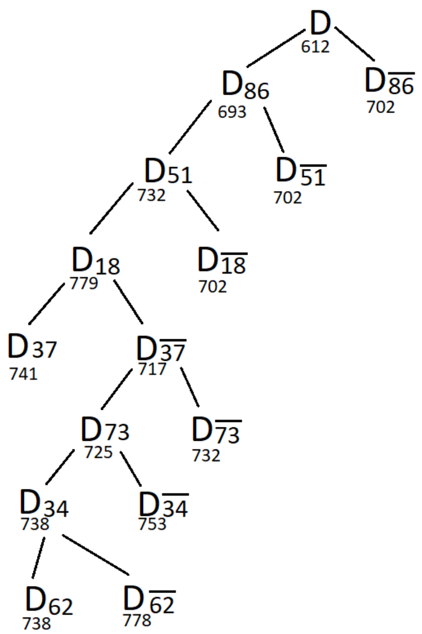

Рис. 2. Ветвление по дугам пути
Fig. 2 Branching on path arcs

Вывод. Собираем все полученные дуги в простой цикл. Получаем: $7 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1 \to 8 \to 6 \to 2 \to 7$. Длина данного цикла равна $\xi\big(D(6,2)\big) = 738$. Минимальный путь: Тамбов → Мичуринск → Моршанск → Рассказово → Кирсанов → Уварово → Жердевка → Котовск → Тамбов.

Пройденное расстояние 738 км.

Таким образом, задачи дискретной оптимизации появляются почти во всех сферах жизни общества. Например, на производственных объектах сталкиваются с задачами о рюкзаке во время сборки заказов, с задачами коммивояжера – при организации туров. А умение решать данные задачи позволяет людям экономить ресурсы и получать большую прибыль.

Список источников

1. *Малютина Е.В., Плужникова Е.А., Филиппова О.В. Фомичева Ю.Г.* Задачник-практикум по математической логике и дискретной математике. Тамбов: Изд. дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2015. 70 с.
2. *Тюхтина А.А.* Методы дискретной оптимизации. Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. 62 с.
3. *Костюк Ю.Л.* Эффективная реализация алгоритма решения задачи коммивояжера. URL: https://www.lib.tsu.ru/mminfo/000349342/20/image/20-078.pdf (дата обращения: 07.10.2021).

References

1. Malyutina E.V., Pluzhnikova E.A., Filippova O.V. Fomicheva Y.G. *Zadachnik-praktikum po matematicheskoy logike i diskretnoy matematike* [Workbook on Mathematical Logic and Discrete Mathematics]. Tambov, Derzhavin Tambov State University Publ. House, 2015, 70 p. (In Russian).
2. Tyukhtina A.A. *Metody diskretnoy optimizatsii* [Discrete Optimization Methods]. Nizhny Novgorod, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2014, 62 p. (In Russian).
3. Kostyuk Y.L. *Effektivnaya realizatsiya algoritma resheniya zadachi kommivoyazhera* [Efficient Implementation of the Algorithm for Solving the Traveling Salesman Problem]. Available at: https://www.lib.tsu.ru/mminfo/000349342/20/image/20-078.pdf (accessed 07.10.2021). (In Russian).

Информация об авторе

Ланина Анастасия Сергеевна, студентка института математики, физики и информационных технологий, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Российская Федерация, 392000 г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33, lanina.anastasiia5@mail.ru

Information about the author

Anastasiya S. Lanina, Student of Institute of Mathematics, Physics, and Information Technology, Derzhavin Tambov State University, Internatsionalnaya St., 33, Tambov 392000, Russian Federation, lanina.anastasiia5@mail.ru

Статья поступила в редакцию/The article was submitted 05.11.2021
Одобрена после рецензирования/Approved after reviewing 09.02.2022
Принята к публикации/Accepted for publication 02.03.2022